

模块三 空间向量及其应用

第1节 空间向量的基本运算 (★★)

强化训练

1. (2023·乐山模拟·★) 在四面体 $ABCD$ 中, E, F 分别为 BC, AD 的中点, 若 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{c}$, 则 $\overrightarrow{EF} =$ ()

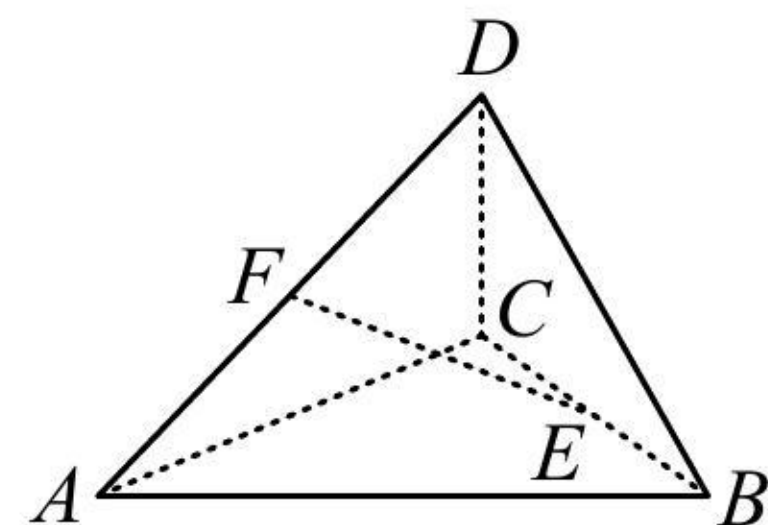
- (A) $\frac{1}{2}(\mathbf{c} - \mathbf{a} - \mathbf{b})$ (B) $\frac{1}{2}(\mathbf{c} + \mathbf{a} + \mathbf{b})$ (C) $\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c})$ (D) $-\frac{1}{2}(\mathbf{c} + \mathbf{a} - \mathbf{b})$

答案: A

解析: 空间基底表示和平面基底表示方法类似, 往与基向量关联较强的向量上化即可,

如图, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} -$

$\overrightarrow{AC}) - \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\mathbf{c} - \mathbf{a} - \mathbf{b})$.



《一数·高考数学核心方法》

2. (2023·河南模拟·★) 已知空间向量 $\mathbf{a} = (2, -1, 2)$, $\mathbf{b} = (1, -2, 1)$, 则 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} =$ ____; 向量 \mathbf{b} 在向量 \mathbf{a} 上的投影向量是 ____.

答案: 6; $(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$

解析: 由题意, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2 \times 1 + (-1) \times (-2) + 2 \times 1 = 6$;

向量 \mathbf{b} 在向量 \mathbf{a} 上的投影向量是 $\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a} = \frac{6}{2^2 + (-1)^2 + 2^2} (2, -1, 2) = (\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$.

3. (2023·信宜模拟·★★) 已知向量 $\mathbf{a} = (1, -1, 3)$, $\mathbf{b} = (-1, 4, -2)$, $\mathbf{c} = (1, 5, x)$, 若 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共面, 则实数 $x =$ ()

- (A) 3 (B) 2 (C) 15 (D) 5

答案: D

解析: 注意到 \mathbf{a}, \mathbf{b} 不共线, 所以 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共面等价于 \mathbf{c} 能用 \mathbf{a}, \mathbf{b} 表示, 可由此建立方程组求 x ,

由题意, 存在实数 λ 和 μ , 使 $\mathbf{c} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}$, 即 $(1, 5, x) = \lambda(1, -1, 3) + \mu(-1, 4, -2) = (\lambda - \mu, -\lambda + 4\mu, 3\lambda - 2\mu)$,

$$\text{所以 } \begin{cases} \lambda - \mu = 1 \\ -\lambda + 4\mu = 5 \\ 3\lambda - 2\mu = x \end{cases}, \text{ 解得: } x = 5.$$

4. (2023·四川绵阳模拟·★★) 已知 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ 是空间的一组基底, 则下列各项中能构成基底的一组向量是

()

(A) $\mathbf{a}, \mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{a}-\mathbf{b}$ (B) $\mathbf{b}, \mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{a}-\mathbf{b}$ (C) $\mathbf{c}, \mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{a}-\mathbf{b}$ (D) $\mathbf{a}+2\mathbf{b}, \mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{a}-\mathbf{b}$

答案: C

解析: 要判断三个向量是否构成基底, 就看它们是否不共面. 观察发现选项中 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ 不共线, 故通过判断能否用它们表示另一向量来看它们是否共面,

A 项, $\mathbf{a} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) + \frac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{b})$, 所以 $\mathbf{a}, \mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{a}-\mathbf{b}$ 共面, 不能构成基底, 故 A 项错误;

B 项, $\mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) - \frac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{b})$, 所以 $\mathbf{b}, \mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{a}-\mathbf{b}$ 共面, 不能构成基底, 故 B 项错误;

C 项, $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ 都没有 \mathbf{c} , 所以 \mathbf{c} 不能用它们表示, 故 $\mathbf{c}, \mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{a}-\mathbf{b}$ 不共面, 能构成基底, 故 C 项正确;

D 项, 假设 $\mathbf{a}+2\mathbf{b} = x(\mathbf{a}+\mathbf{b}) + y(\mathbf{a}-\mathbf{b})$, 则 $\mathbf{a}+2\mathbf{b} = (x+y)\mathbf{a} + (x-y)\mathbf{b}$, 所以 $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=2 \end{cases}$, 解得: $x = \frac{3}{2}, y = -\frac{1}{2}$,

从而 $\mathbf{a}+2\mathbf{b}$ 能用 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ 表示, 它们共面, 故 D 项错误.

5. (2023·饶平模拟·★★)(多选) 已知空间中三点 $A(0,1,0), B(2,2,0), C(-1,3,1)$, 则下列说法正确的是 ()

(A) $AB \perp AC$

(B) 与 \overrightarrow{AB} 同向的单位向量是 $(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, 0)$

(C) \overrightarrow{AB} 和 \overrightarrow{BC} 的夹角余弦值是 $\frac{\sqrt{55}}{11}$

(D) 平面 ABC 的一个法向量是 $(1, -2, 5)$

答案: ABD

解析: A 项, $\overrightarrow{AB} = (2, 1, 0), \overrightarrow{AC} = (-1, 2, 1), \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times (-1) + 1 \times 2 + 0 \times 1 = 0 \Rightarrow AB \perp AC$, 故 A 项正确;

B 项, 与 \overrightarrow{AB} 同向的单位向量是 $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\overrightarrow{AB} = (\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, 0)$, 故 B 项正确;

C 项, $\overrightarrow{BC} = (-3, 1, 1)$, 所以 $\cos \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC} \rangle = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{2 \times (-3) + 1 \times 1 + 0 \times 1}{\sqrt{2^2 + 1^2} \times \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 1^2}} = -\frac{\sqrt{55}}{11}$, 故 C 项错误;

D 项, 设平面 ABC 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2x + y = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AC} = -x + 2y + z = 0 \end{cases}$, 令 $x = 1$ 可得 $\begin{cases} y = -2 \\ z = 5 \end{cases}$,

所以 $\mathbf{n} = (1, -2, 5)$ 是平面 ABC 的一个法向量, 故 D 项正确.